□15□ □□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□

1□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ □

□1□□□□□□ $P(2,4)$ □□□□□□□

□2□□□□□□ $P(2,4)$ □□□□□□

□3□□□□□1 □□□□□□□□□

□□□□□□□1□ $P(2,4)$ □□□ $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ □□□ $y'=x^2$ □

$\therefore$ □□ $P(2,4)$ □□□□□□□□ $k_1=4$ □

$\therefore$ □□□□ $P(2,4)$ □□□□□□□ $y-4=4(x-2)$ □□ $4x-y-4=0$ □

□2□□□□ $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ □□□ $P(2,4)$ □□□□□□□ $A(x_0$ □ $\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3})$ □

□□□□□□ $k=x_0^2$ □

$\therefore$ □□□□□ $y-(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3})=x_0^2(x-x_0)$ □

□ $P(2,4)$ □□□□□

$\therefore x_0^3-3x_0^2+4=0$ □

$\therefore x_0^3+x_0^2-4x_0^2+4=0$ □

$\therefore (x_0+1)(x_0-2)^2=0$

□□ $x_0=-1$ □ $x_0=2$

□□□□□□□□□ $4x-y-4=0$ □ $x-y+2=0$ □

□3□□□□□ $(x_0$ □ $y_0)$

□□□□□□□ $k=x_0^2=1$□$x_0=\pm1$□□□□ $(1,\frac{5}{3})$□$(-1,1)$

∴□□□□□ $y-1=x+1$□$y-\frac{5}{3}=x-1$□□ $x-y+2=0$□$3x-3y+2=0$□

2□□2021•□□□□□□□ $f(x)=x^3-x^2+ax+1$□

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□

□□□□□□□1□ $f'(x)=3x^2-2x+a$□$\Delta=4-12a$□

① □$\Delta\leqslant 0$□□ $a\geqslant\frac{1}{3}$□□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□ $f'(x)\geqslant 0$□□ $f(x)$□R□□□□□□

② □$\Delta>0$□□ $a<\frac{1}{3}$□□□ $f'(x)=0$□□□ $x_1=\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}, x_2=\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$□

□ $f'(x)>0$□□□ $x<x_1$□$x>x_2$□□ $f'(x)<0$□□□ $x_1<x<x_2$□

∴ $f(x)$□$(-\infty,x_1)$□$(x_2$□$+\infty)$□□□□□□$(x_1$□$x_2)$□□□□□

□□□□ $a\geqslant\frac{1}{3}$□□ $f(x)$□R□□□□□□□ $a<\frac{1}{3}$□□ $f(x)$□ $(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}),(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty)$ □□□□□□

$(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3})$ □□□□□

□2□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□ l□□□□ $(x_0,x_0^3-x_0^2+ax_0+1)$, $f'(x_0)=3x_0^2-2x_0+a$□

□□□□□□ $y-(x_0^3-x_0^2+ax_0+1)=(3x_0^2-2x_0+a)(x-x_0)$□

□□□□□□□□□□□ $2x_0^3-x_0^2-1=0$□□□ $x_0=1$□

∴□□□□□ $y=(a+1)x$□

□ $x^3 - x^2 + ax + 1 = (a+1)x$ □□ $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ □□□ $x = 1$ □ $x = -1$ □

$\therefore$ □□ $y = f(x)$ □□□□□□□□□□□ $y = f(x)$ □□□□□□□□ $(1, a+1)$ □ $(-1, -a-1)$ □

3□□2021•□□□□□□□□□ $f(x) = \dfrac{e^x}{x^a}(x > 0)$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $a = 2$ □□□□□ $y = f(x)$ □□ $(2,0)$ □□□□□□ $y = f(x)$ □□□□□□□□

□□□□□□□1□ $f'(x) = \dfrac{e^x(x-a)}{x^{a+1}}$ □

□ $a \leqslant 0$ □□ $f'(x) > 0$ □□ $f(x)$ □ $(0, +\infty)$ □□□□□□

□ $a > 0$ □□ $f(x)$ □ $(0, a)$ □□□□□□□ $(a, +\infty)$ □□□□□□

□2□□ $a = 2$ □□ $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}(x > 0)$ □□ $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}(x > 0)$ □

□□□□ $(x_0$ □ $f(x_0))$ □□□□□□□ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ □

□ $y - \dfrac{e^{x_0}}{x_0^2} = \dfrac{e^{x_0}(x_0 - 2)}{x_0^3}(x - x_0)$ □

□ $(2,0)$ □□□□ $-\dfrac{e^{x_0}}{x_0^2} = \dfrac{e^{x_0}(x_0 - 2)}{x_0^3}(2 - x_0)$ □□□ $x_0 = 1$ □ 4□

□□ f □1□ $= e$ □ f □4□ $= \dfrac{e^4}{16}$ □

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $y = f(x)$ □□□□□□□□□□

□□□□ $y = f(x)$ □□ (2.0) □□□□□□ $y = f(x)$ □□□□□□□□ $(1, e)$ □ $(4, \dfrac{e^4}{16})$ □

4□□2021•□□□□□□□□□□ $f(x)=(x-a)^2+(lnx^2-2a)^2$ □□□ $x>0$ □ $a\in R$ □□□ x_0 □ $f(x_0)\leqslant\frac{4}{5}$ □□ a □□□

□□□□□□ $f(x)=(x-a)^2+(lnx^2-2a)^2$ □□□□□□□ $P(x,lnx^2)$ □□□□ $Q(a,2a)$ □□□□□□□□

□□ P □□□ $y=2lnx$ □□□□□ Q □□□ $y=2x$ □□

□□□□ x_0 □ $f(x_0)\leqslant\frac{4}{5}$ □□□□□□□ $y=2x$ □□□□□□□□□□□□□

□□□ $y=2lnx$ □□□□ $y'=\frac{2}{x}$ □

□ $\frac{2}{x}=2$ □□□ $x=1$ □□□□□ $y=2x$ □□□ $y=2lnx$ □□□□ $(1,0)$ □

$\therefore$ □□ $y=2x$ □□□□□□□ $y=2lnx$ □□□□□□□□ $d=\frac{|2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ □

$\therefore f(x)\geqslant\frac{4}{5}$ □

□□□□□□□ $f(x_0)\leqslant\frac{4}{5}$ □□ $f(x_0)=\frac{4}{5}$ □□□ Q □□□□□□

□ $k_{PQ}=\frac{2a}{a-1}=-\frac{1}{2}$ □□□ $a=\frac{1}{5}$ □

5□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$ □ $x=-2$ □□□□□□□ $x=-1$ □□□□□□□□ -3 □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□ $[-1$ □ $2]$ □□□□□□□□□□

□3□□□□ $P(1,m)$ □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□ m □□□□□□

□□□□□□□1□ $f'(x)=3x^2+2bx+c$

$f(x)$ □ $x=-2$ □□□□□□□ $x=-1$ □□□□□□□□ -3

□□□ $\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f(-1)=-3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=3 \\ c=0 \end{cases}$

□□ $f(x)$ □□□□□ $f(x)=x^3+3x^2-1$

□2□□□1□□□ $f'(x)=3x^2+6x$

□ $f'(x)=0$ □□ $x_1=0$ □ $x_2=-2$ □

□□□□ $x\in[-1$□$0]$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □ $(-1,0)$ □□□□□□

□ $x\in[0$□$2]$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f(0)=-1$□ $f(x)_{max}=max\{f(-1)$□ f□2□$\}=f$□2□$=19$□

□3□□□□□ $(x_0$□ $x_0^3+3x_0^2-1)$

□□□□□□ $k=f'(x_0)=3x_0^2+6x_0$

$\therefore$□□□□□□ $y-(x_0^3+3x_0^2-1)=(3x_0^2+6x_0)(x-x_0)$ ①

□□□□□ $P(1,m)$ □□□①□□□□ $m=-2x_0^3+6x_0-1$

□ $y=m$ □ $h(x_0)=-2x_0^3+6x_0-1$

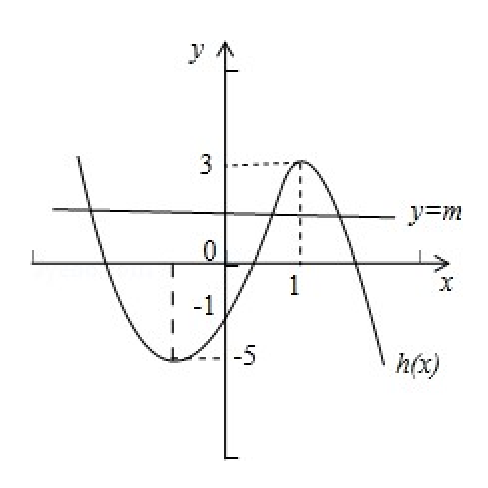
$h(-1)=-5$□ h□1□$=3$□ $h(0)=-1$□

$h'(x_0)=-6x_0^2+6$□□ $h'(x_0)=0\Rightarrow x_1=-1$□ $x_2=1$□

$h(x_0)$□ $(-\infty,-1)$□ $(1,+\infty)$ □□□□□ $(-1,1)$ □□□□□□

□□ $P(1,m)$ □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□□□ x_0 □□□□ $y=m$□ $h(x)$ □□□□□□

□□□□□□ $-5<m<3$□



6□□2021•□□□□□□□□□□）□□□□ $f(x)=x^3-x$□

(I)□□□ $y=f(x)$ □□ $M(t$□ $f(t))$ □□□□□□□

(II)□□□ $a>0$ □□□□□ $P(a,m)$ □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□ m □□□□□□

□□□□□□□I□ □□ $f(x)=x^3-x$□

$\therefore f'(x)=3x^2-1$□

□□□□□ $y-f(t)=f'(t)(x-t)$□

□ $y=(3t^2-1)x-2t^3$ □

□II□□□ $\Leftrightarrow$ □□ t □□□ $m=(3t^2-1)a-2t^3$

□ $m=-2t^3+3at^2-a(a>0)$ □□□□□□□□

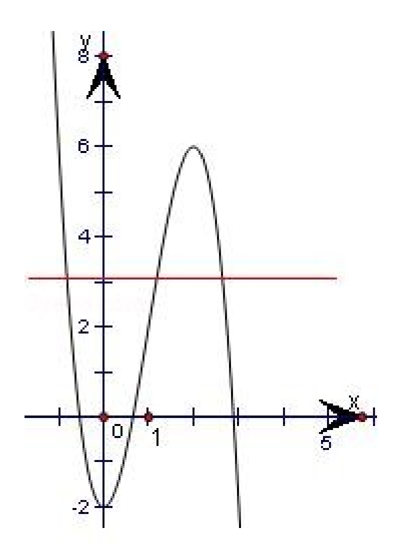
□ $g(t)=-2t^3+3at^2-a$ □□ $g'(t)=-6t(t-a)$ □

□□ $g(t)$ □ $(-\infty,0)$ □□□

□ $(0,a)$ □□□□ $(a,+\infty)$ □□□

$g(t)$ □□□□□□ $g(0)=-a$ □□□□□ g□a□$=a^3-a$□

□□□□□ $m\in(-a, a^3-a)$ □



7□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=2x^3-ax^2+b$ □

□1□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $a=1$ □ $b=0$ □□□□□ $P(1,t)$ □□3□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□ t □□□□□□

□□□□□□□1□ $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$ □

□ $f'(x)=0$ □□ $x=0$ □ $x=\frac{a}{3}$ □

□ $a>0$ □□□ $x\in(-\infty, 0)\cup(\frac{a}{3}, +\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $(0, \frac{a}{3})$ □□ $f'(x)<0$ □

□ $f(x)$ □ $(-\infty,0)$ □ $(\frac{a}{3}, +\infty)$ □□□□□□□ $(\frac{a}{3}, +\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□□ $x=0$ □

□ $a<0$ □□□ $x\in(-\infty, \frac{a}{3})\cup(0, +\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $x\in(\frac{a}{3}, 0)$ □□ $f'(x)<0$ □

□ $f(x)$ □ $(-\infty, \frac{a}{3})$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $(\frac{a}{3}, 0)$ □□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□ $x=\frac{a}{3}$ □

□ $a=0$ □ $f(x)$ □ $(-\infty,+\infty)$ □□□□□□□□□

□2□□□□ $P(1, t)$ □□□□□ $y=f(x)$ □□□□ $(x_0$ □ $y_0)$ □

□ $y_0=2x_0^3-x_0^2$ □□□□□ $k=6x_0^2-2x_0$ □

□□□□□□ $y-y_0=(6x_0^2-2x_0)(x-x_0)$ □

□□ $t-y_0=(6x_0^2-2x_0)(1-x_0)$ □□□□ $4x_0^3-7x_0^2+2x_0+t=0$ □

□□□□ $g(x)=4x^3-7x^2+2x+t$ □

□"□□□ $P(1, t)$ □□3□□□□□ $y=f(x)$ □□"□□□" $g(x)$ □□□□□□□"□

$g'(x)=12x^2-14x+2$ □

$g'(x)$ □ $g(x)$ □□□□□□

x	$(-\infty, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{6}$	$(\frac{1}{6}, 1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	□□□	↘	□□□	↗

□□ $g(x)$ □□□□ $g(\frac{1}{6})=\frac{17}{108}+t$ □□□□ g □1□ $=t-1$ □□□ $g(x)=0$ □□□□

□ $g(\frac{1}{6})>0$ □ g □1□ <0 □□□ $-\frac{17}{108}<t<1$ □

□□□□□ $P(1, t)$ □□3□□□□□ $y=f(x)$ □□□ t □□□□□ $(-\frac{17}{108}, 1)$ □

8□□2021•□□□□□□□□□□□ $f(x)=xe^x$ □□□ $x\in R$ □

□I□□□□ $f(x)$ □□ $(x_0$ □ $x_0e^{x_0})$ □□□□□□

□II□□□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□

□1□□ $-2<a<0$ □□□□□ $-\frac{1}{e^2}(a+4)<b<f$ □a□□

□2□□ $a<-2$ □□□□ b □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□I□ $f(x)=xe^x$ □

$\therefore f'(x)=(x+1)e^x$ □

$\therefore$ □□ $f(x)$ □□ $(x_0$ □ $x_0e^{x_0})$ □□□□□□□ $k=f'(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}$ □

□□□□□□□□□□□□ $y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$ □□ $y=(x_0+1)e^{x_0}x-x_0^2e^{x_0}$ □

□II□□1□□□□□□□ (a,b) □□□□ x_0 □□ $b=(x_0+1)e^{x_0}a-x_0^2e^{x_0}$ □

□□□□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□ $(x_0^2-ax_0-a)e^{x_0}+b=0$ □□□□□□□□□□

□ $g(x_0)=(x_0^2-ax_0-a)e^{x_0}+b$ □□ $g'(x_0)=[x_0^2+(2-a)x_0-2a]e^{x_0}$ □

□ $g'(x_0)=0$ □□□ $x_0=-2$ □□ $x_0=a\in(-2,0)$

□ $x_0\in(-\infty,-2)$ □ $(a,+\infty)$ □ $g'(x_0)>0$ □

□ $x_0\in(-2,a)$ □ $g'(x_0)<0$ □

$\therefore$ □ $x_0=-2$ □□ $g(x_0)$ □□□□□□ $x_0=a$ □□ $g(x_0)$ □□□□□

□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□ $g(x_0)=0$ □□□□□□□□□□□□ $\begin{cases}g(-2)>0\\g(a)<0\end{cases}$

□ $\begin{cases}(4+a)e^{-2}+b>0\\-ae^a+b<0\end{cases}$ □□ $\begin{cases}b>-\frac{1}{e^2}(a+4)\\b<ae^a=f(a)\end{cases}$ □

□ $-\frac{1}{e^{2}}(a+4)<b<f$ □a□□

□2□□ $g'(x_0)=0$ □□□ $x_0=-2$ □□ $x_0=a\in(-\infty,-2)$

□ $x_0\in(-\infty,a)$ □ $(-2,+\infty)$ □ $g'(x_0)>0$ □

□ $x_0\in(a,-2)$ □ $g'(x_0)<0$ □

$\therefore$ □ $x_0=a$ □□ $g(x_0)$ □□□□□□ $x_0=-2$ □□ $g(x_0)$ □□□□□

□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□ $g(x_0)=0$ □□□□□□□□□□□ $\begin{cases}g(-2)<0\\g(a)>0\end{cases}$

□ f □a□ $<b<-\frac{1}{e^{2}}(a+4)$ □

9□□2021•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^3-x$

□I□ □□□ $y=f(x)$ □□□ $M(t$ □ $f(t))$ □□□□□□□

□II□ □ $a>0$ □□□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□ $-a<b<f$ □a□□

□□□□□□1□□□□ $f(x)$ □□□□□ $f'(x)=3x^2-1$ □

□□ $y=f(x)$ □□ $M(t$ □ $f(t))$ □□□□□□□□ $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ □□ $y=(3t^2-1)x-2t^3$ □

□2□□□□□□□□□□ (a,b) □□□□ t □□ $b=(3t^2-1)a-2t^3$ □

□□□□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□□ $2t^3-3at^2+a+b=0$ □□□□□□□□□□

□ $g(t)=2t^3-3at^2+a+b$ □□ $g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$ □

□ t □□□□ $g(t)$ □ $g'(t)$ □□□□□□□□

t	$(-\infty,0)$	0	$(0,a)$	a	$(a,+\infty)$
$g'(t)$	+	0	-	0	+

$g(t)$	□□	□□□ $a+b$	□□	□□□ $b-f$□a□	□□

□ $g(t)$ □□□□□□□□□ $a+b<0$ □□□□ $b-f$□a□>0□□□□ $g(t)=0$ □□□□□□□□□

□ $a+b=0$ □□□□□ $g(t)=0$ □ $t=0$ □ $t=\frac{3a}{2}$ □□□□ $g(t)=0$ □□□□□□□□□□□

□ $b-f$□a□$=0$□□□□□ $g(t)=0$ □ $t=-\frac{a}{2}$ □ $t=a$ □□□□ $g(t)=0$ □□□□□□□□□□□

□□□□□□ (a,b) □□□□ $y=f(x)$ □□□□□□ $g(t)=0$ □□□□□□□□□□

□ $\begin{cases} a+b>0 \\ b-f(a)<0 \end{cases}$ □□ $-a<b<f$ □a□□

10□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=x^3+ax$ □

□I□□ $x=1$ □□ $f(x)=x^3+ax$ □□□□□□ a □□□

□II□□□□ $P(1,1)$ □□□□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□ a □□□□□□

□III□□□I□□□□□□□□□□ $A(0,3)$ □ $B(2,0)$ □ $C(-2,-2)$ □□□□□□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□13 □□

□□□I□□ $f(x)=x^3+ax$ □ $f'(x)=3x^2+a$ □…□1 □□

□□□□ f'□1□$=0$□□□ $a=-3$ □…□2 □□

□□ $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ □

□ $f'(x)=0$ □□□ $x=-1$ □ $x=1$ □

□□ $-1<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □ $(-1,1)$ □□□□□

□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□

□□□ $x=1$ □□ $f(x)$ □□□□□□□ $a=-3$ □…□4 □□

□Ⅱ□□□□ $P(1,1)$ □□□□□□ $y=f(x)$ □□□□ $(x_0$□$y_0)$□

□ $y_0=x_0^3+ax_0$ □□□□□□□ $f'(x_0)=3x_0^2+a$□

□□□□□□□ $y-y_0=(3x_0^2+a)(x-x_0)$□

□□ $1-(x_0^3+ax_0)=(3x_0^2+a)(1-x_0)$□

□□□ $2x_0^3-3x_0^2+1-a=0$□… □6 □□

□ $g(x)=2x^3-3x^2+1-a$□

□“□□ $P(1,1)$ □□□□□□□□□ $y=f(x)$ □□”□□“ $g(x)$ □□□□□”□ $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$□

□ x □□□□ $g(x)$ □ $g'(x)$ □□□□□□□□

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$1-a$	↘	$-a$	↗

□□□ $g(0)=1-a$ □ $g(x)$ □□□□□ g□1□$=-a$ □ $g(x)$ □□□□□… □8 □□

□ $g(x)$ □□□□□□□□□ $g(0)=1-a<0$ □ g□1□$=-a>0$□□□ $a>1$ □ $a<0$□

□□□□□ $P(1,1)$ □□□□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□ a □□□□□□ $a>1$ □ $a<0$□… □10 □□

□Ⅲ□□□ $A(0,3)$ □□ 1 □□□□□□ $y=f(x)$ □□□

□□ $B(2,0)$ □□ 3 □□□□□□ $y=f(x)$ □□□

□□ $C(-2,-2)$ □□ 2 □□□□□□ $y=f(x)$ □□□… □13 □□

11□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=x^2+\frac{a}{x}(a$ □□□□□□

□1□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□ a □□□□□□

□2□□□□□□□□□I□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□1□□□ $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ □□□□ $f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2}$ □

□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $2x^3-a\geq 0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $a\leq 2x^3$ □□ $2x^3$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $2x^3$ □□□□ $(0,+\infty)$ □

□ $a\leq 0$ □□□ a □□□□□□ $(-\infty$ □ $0]$ □

□2□□□□□□ I □ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□ I □

□□□□□ $(x_1$ □ $f(x_1))$ □ $(x_2$ □ $f(x_2))$ □

□□□□□ $f'(x_1)=f'(x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ □

□ $f'(x_1)=f'(x_2)$ □□□ $2x_1-\frac{a}{x_1^2}=2x_2-\frac{a}{x_2^2}$ □

□□ $2(x_1-x_2)=a\cdot\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_1^2x_2^2}$ □□□ $x_1+x_2\neq 0$ □ $x_1-x_2\neq 0$ □

□□ $a=-\frac{2x_1^2x_2^2}{x_1+x_2}$ □□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-f'(x_1)=\frac{x_1^2+\frac{a}{x_1}-(x_2^2+\frac{a}{x_2})}{x_1-x_2}-2x_1+\frac{a}{x_1^2}$

$=x_1+x_2-\frac{a}{x_1x_2}-2x_1+\frac{a}{x_1^2}=x_2-x_1+\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}-\frac{2x_2^2}{x_1+x_2}=-\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}\neq 0$ □

□ $f'(x_1)=f'(x_2)\neq\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ □

□□□□□□ l □ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□

12□□2021 □•□□□□□□□□□□ $y=kx+b$ □□□ $f(x)=lnx+1$ □□□□□□□□□□ $y=ln(x+2)$ □□□□

□I□□ k □ b □□□

□II□□□□ $x\in(0$□$1)\cup(1$□$+\infty)$ □□ $f(x)<x$□

□III□□ $x\in(0,1)$ □□□□□□ $g(x)=1+(c-1)x-c^x(c>1)$ □□□□□

□□□□□□I□□ $y=kx+b$ □ $y=lnx+1$ □ $y=ln(x+2)$ □□□□□□ $(x_1$ □ $lnx_1+1)$ □ $(x_2$ □ $ln(x_2+2))$ □

□ $y=lnx+1$ □ $y=ln(x+2)$

$\therefore y'=\frac{1}{x}$ □ $y'=\frac{1}{x+2}$ □

$\therefore k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+2}$ □

$\therefore x_1-x_2=2$ □

□□□□□□□ $y-(lnx_1+1)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$ □□□ $y=\frac{x}{x_1}+lnx_1$ □

□ $y-ln(x_2+2)=\frac{1}{x_2+2}(x-x_2)$ □□□ $y=\frac{x}{x_1}+\frac{2-x_1}{x_1}+lnx_1$ □

$\therefore \frac{2-x_1}{x_1}=0$ □

□□ $x_1=2$ □

$\therefore k=\frac{1}{2}$ □ $b=ln2$ □

□□□□II□□ $h(x)=f(x)-x=lnx+1-x$ □ $x\in(0$□$1)\cup(1$□$+\infty)$ □

□ $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ □

□ $h'(x)>0$ □□□ $x<1$ □

□ $h'(x)<0$ □□□ $x>1$ □

□ $h(x)$ □ $(0,1)$ □□□ $(1,+\infty)$ □□□

□ $h(x)<h$ □1□ $=0$ □

□ $x\in(0$□$1)\cup(1$□$+\infty)$ □□ $h(x)<0$ □ $f(x)<x$ □

□III□ $g(x)=1+(c-1)x-c^x$ □ $g'(x)=c-1-c^x lnc$ □

$g''(x)=-c^x(lnc)^2<0$ □ $\therefore g'(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□ $g'(0)=c-1-lnc$ □ g' □1□ $=c-1-clnc$ □

□□II□□ $h(x)$ □□□□□□□ $g'(0)=c-1-lnc>0$ □

□□II□□□□ g' □1□ $=c-1-clnc<0$ □ $\therefore\exists t\in(0,1)$ □□□ $g'(t)=0$ □

□ $x\in(0,t)$ □□ $g'(x)>0$ □ $x\in(t,1)$ □□ $g'(x)<0$ □

□ $g(x)$ □ $(0,t)$ □□□□□□□ $(t,1)$ □□□□□□

13□□2021□•□□□□□□□□ $f(x)=ae^x$ □ $g(x)=ln(ax)+\frac{5}{2}$ □ $a>0$ □

□I□□ $y=f(x)$ □□□ $x=1$ □□□□□□ $(3,3)$ □□ a □□□□□ $h(x)=xf(x)+m(x^2+2x-1)(m\in R)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□

□II□□□□□□□ $l:y=kx+b$ □□□ $C_1:f_1(x,y)=0$ □ $C_2:f_2(x,y)=0$ □□□□□□□□□□ l □□□ C_1 □ C_2 □□□□□□□□ $y=f(x)$

□ $y=g(x)$ □□□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□I□□ $f(x)=ae^x$ □□ $f'(x)=ae^x$ □□ f' □1□ $=ae$ □

□□ $x=1$ □□□□□ $y-ae=ae(x-1)$ □□□ $(3,3)$ □□ $a=\frac{1}{e}$ □

$f(x)=e^{x-1}$ □□□□ $h(x)=xe^{x-1}+m(x^2+2x-1)$ □

$h'(x)=(x+1)(e^{x-1}+2m)$ □

① □ $m\geq 0$ □□ $h'(x)>0$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□ $h(x)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □

② □ $1+ln(-2m)\leq 0$ □□ $-\frac{1}{2e}\leq m<0$ □□ $h'(x)\geq 0$ □ $x\in(0,+\infty)$ □

□ $h(x)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □

③ □ $1+ln(-2m)>0$ □□ $m<-\frac{1}{2e}$ □□□ $h'(x)>0$ □ $x>1+ln(-2m)$ □

□ $h(x)$ □□□□□□□ $(1+ln(-2m)$ □ $+\infty)$ □

□□□□ $m\geq -\frac{1}{2e}$ □□ $h(x)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □

□ $m<-\frac{1}{2e}$ □□ $h(x)$ □□□□□□□ $(1+ln(-2m)$ □ $+\infty)$ □

□II□□ $f(x)=ae^x$ □□□□□□□ $x=x_1$ □ $f'(x)=ae^x$ □

□□□□□ $y-ae^{x_1}=ae^{x_1}(x-x_1)\cdots\cdots$ ①

□ $g(x)=ln(ax)+\frac{5}{2}$ □□□□□□□ $x=x_2$ □ $g'(x)=\frac{1}{x}$ □

□□□□□ $y-ln(ax_2)-\frac{5}{2}=\frac{1}{x_2}(x-x_2)\cdots\cdots$ ②

□□①②□□ $\begin{cases} ae^{x_1}=\frac{1}{x_2} \\ ae^{x_1}(1-x_1)=ln(ax_2)+\frac{3}{2} \end{cases}$ □□□ x_2 □ $a=\frac{1}{e^{x_1}}\cdot\frac{x_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}(x_1\neq 1)$ □

□□□□ $\varphi(x)=\frac{1}{e^x}\cdot\frac{x-\frac{3}{2}}{x-1}$ □ $\varphi'(x)=-\frac{1}{e^x}\cdot\frac{(2x-1)(x-2)}{2(x-1)^2}$ □

□$\varphi'(x)=0$□□$x=\frac{1}{2}$□2□

□$x<\frac{1}{2}$□$x>2$□□$\varphi'(x)<0$□□□$y=\varphi(x)$□□□$(-\infty,\frac{1}{2})$□$(2,+\infty)$□□□□□□

□$\frac{1}{2}<x<2$□$x\neq 1$□□$\varphi'(x)>0$□□□$y=\varphi(x)$□□□$(\frac{1}{2},1)$□$(1,2)$□□□□□□

$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{2}{\sqrt{e}}$□$\varphi(2)=\frac{1}{2e^2}$□□□$a\in(0,\frac{1}{2e^2}]\cup[\frac{2}{\sqrt{e}},+\infty)$□□□□$a=\frac{1}{e^{x_1}}\cdot\frac{x_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$□□□

□□□□□$f(x)=ae^x$□$g(x)=ln(ax)+\frac{5}{2}$□□□□□□

14□□2021•□□□□□□□□$f(x)=x^3-x^2-(a-16)x$□$g(x)=alnx$□$a\in R$□□□$h(x)=\frac{f(x)}{x}-g(x)$□□□□$h'(x)$□$[\frac{5}{2},4]$□□□□□

□1□□□□a□□□□□□

□2□□□□□□a□□$x\in[0$□$b]$□□□□$f(x)$□$x=0$□□□□□□□□□□□b□□□□□

□3□□□□l□□□$y=f(x)$□$y=g(x)$□□□□□l□y□□□□□□-12□□□□a□□□

□□□□□□□1□□□□□$f(x)=x^3-x^2-(a-16)x$□$g(x)=alnx$□$a\in R$□

□$h(x)=x^2-x-alnx-a+16$□□$h'(x)=2x-1-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-x-a}{x}$□

□□□$2x^2-x-a=0$□$[\frac{5}{2},4]$□□□□□

□$a=2x^2-x\in[10$□$28]$□

□$a\in[10$□$28]$□

□2□□$f(x)=x^3-x^2-(a-16)x$□$f'(x)=3x^2-2x-a+16$□△$=4-12(-a+16)$□

① □△„0□□□$a\in[10$□$\frac{47}{3}]$□□$f'(x)..0$□$f(x)$□□□□□□□□□□

② □$\triangle > 0$□□□ $a\in(\frac{47}{3},28]$ □□ $f'(x)=0$ □□□□ $x_1=\frac{1-\sqrt{3a-47}}{3}, x_2=\frac{1+\sqrt{3a-47}}{3}$ □

(i) □ $a\in(\frac{47}{3},16)$ □□□ $x\in(0,x_1)$ □□□□□□□□□ $f(0)$ □□□□□□□□□□□□□□

(ii) □ $a\in[16$□$28]$ □□□□ $x_1\leq 0<x_2$ □

□ $f(x)$ □ $(0,x_2)$ □□□□ $(x_2$□$+\infty)$ □□□

□ $b\in(0,x_2)$ □□ $f(x)$ □ $[0$□$b]$ □□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□

□ $b\in(x_2$□$+\infty)$ □□ $f(x)$ □ $(0,x_2)$ □□□□ $(x_2$□$b)$ □□□

□□ $f(0)$ □□□□ $f(b)\geq f(0)$ □b□□□ $b^3-b^2-(a-16)b\leq 0$ □

□ $b^2-b\leq a-16$ □ $a\in[16$□$28]$ □

□ $b^2-b\leq 12$ □□ $b\in(0$□$4]$ □

□□□ b □□□□4□

□3□□□□ l □ $y=f(x)$ □□□□ $(x_1,x_1^3-x_1^2-(a-16)x_1)$ □

$f'(x)=3x^2-2x-(a-16)$ □□□□□□□ $k=3x_1^2-2x_1-(a-16)$ □

□□□□□ $y=[3x_1^2-2x_1-(a-16)](x-x_1)+x_1^3-x_1^2-(a-16)x_1$ □

□ $y=[3x_1^2-2x_1-(a-16)]x-2x_1^3+x_1^2$ □

□□□□□□ $-2x_1^3+x_1^2=-12$ □□□□ $(x_1-2)(2x_1^2+3x_1+6)=0$ □□ $x_1=2$ □

□□□□□□ $y=(24-a)x-12$ □

□□□ l □ $y=g(x)$ □□□□ $(m,a\ln m)$ □

□ $g'(x)=\frac{a}{x}$ □□□□□□□ $y=\frac{a}{m}(x-m)+a\ln m$ □

□ $y=\frac{a}{m}x+alnm-a$ □

□ $\begin{cases}\frac{a}{m}=24-a\\ alnm-a=-12\end{cases}$ □□□ a □□ $lnm+\frac{1}{2m}-\frac{1}{2}=0$ □

□ $\frac{a}{m}=24-a, a\in[10,28]$ □ $m\geqslant\frac{5}{7}$ □

□ $h(x)=lnx+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}$ □ $x\geqslant\frac{5}{7}$ □

$h'(x)=\frac{2x-1}{2x^2}>0$ □ $h(x)$ □□□□ h □1□ $=0$ □

□ $m=1$ □□□□ $a=12$ □

15□□2021•□□□□□□□□ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax, g(x)=(a+1)lnx(a<0)$ □

□1□□□ $P(x_0$ □ $y_0)$ □□□ $f(x)$ □ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□ P □□□□□□□□□□ a □□□

□2□□□□ $h(x)=f(x)-g(x)$ □□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□1□□□□□□□ $y=f(x)$ □ $y=g(x)(x>0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□ $f'(x)=x+a$ □ $g'(x)=\frac{a+1}{x}$ □

□□ $f(x_0)=g(x_0)$ □ $f'(x_0)=g'(x_0)$ □□ $\begin{cases}\frac{1}{2}x_0^2+ax_0=(a+1)lnx_0\\ x_0+a=\frac{a+1}{x_0}\end{cases}$ □

□ $x_0+a=\frac{a+1}{x_0}$ □□ $x_0=1$ □ $x_0=-a-1$ □

□□ P □□□□ $-a-1=1$ □ $-a-1\leqslant 0$ □

□ $a=-2$ □ $a\geqslant-1$ □

□ $\frac{1}{2}x_0^2+ax_0=(a+1)lnx_0$ □□ $a=-\frac{1}{2}$ □

综上可得，$a=-\frac{1}{2}$；

(2) 由 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-(a+1)\ln x$，$x>0$，

则 $h'(x)=x+a-\frac{a+1}{x}=\frac{(x-1)(x+a+1)}{x}$，

(i) 若 $a+1>0$ 即 $0>a>-1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $x\to 0$ 时，$h(x)\to +\infty$，且 $h(2)=2+2a-(a+1)\ln 2>2+2a-2(a+1)=0$，

故要使得 $h(x)$ 有 2 个零点，只有 $h(1)<0$ 即 $-1<a<-\frac{1}{2}$，

当 $a=-1$ 时，$h(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ 只有一个零点，

故 $-1<a<-\frac{1}{2}$

(ii) 若 $a+1<0$，即 $a<-1$ 时，

① 当 $a=-2$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意；

② 当 $-2<a<-1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 上单调递增，在 $(-a-1,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

且 $x\to 0$ 时，$h(x)\to -\infty$，且 $h(1)=a+\frac{1}{2}<0$，$h(e^2)=\frac{1}{2}e^4+ae^2-(a+1)\ln e^2>\frac{1}{2}e^4+ae^2>0$，

故要使得 $h(x)$ 有 2 个零点，则 $h(-a-1)=\frac{1}{2}(a+1)^2-a(a+1)-(a+1)\ln(-a-1)=0$，

即 $\frac{1-a}{2}-\ln(-a-1)=0$，

令 $m(a)=\frac{1-a}{2}-\ln(-a-1)$，$-2<a<-1$，

则 $m'(a)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}=-\frac{a+3}{2(a+1)}>0$，

故 $m(a)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递增，且 $m(-2)=\frac{3}{2}>0$，

□m□a□>0□$(-2,-1)$□□□□□□□□□2□□□□

③□$a<-2$□□$h(x)$□$(0,1)$□□□□□□□$(1,-a-1)$□□□□□□□$(-a-1,+\infty)$□□□□□□□h□1□$=a+\frac{1}{2}<0$□

□$h(x)$□□□□2□□□□

□□$-1<a<-\frac{1}{2}$□

16□□2021□•□□□□□□□□□□$f(x)=a+lnx$□$g(x)=\frac{1}{2}x^2$□

□1□□$a=ln2$□□□□$y=f(x)$□□□□$x=\frac{1}{2}$□□□□□□□□

□2□□□□$y=f(x)$□□□□□□$y=g(x)$□□□□□□□□□□□□□□a□□□□□□

□□□□□□1□□$a=ln2$□$f(x)=ln2+lnx(x>0)$□$f'(x)=\frac{1}{x}$□

□□$y=f(x)$□□□□$x=\frac{1}{2}$□□□□□□□$k=f'(\frac{1}{2})=2$□□$f(\frac{1}{2})=0$□

□□□$y=f(x)$□□□□$x=\frac{1}{2}$□□□□□□□□$y-0=2(x-\frac{1}{2})$□□$y=2x-1$□

□2□□$f(x)$□$g(x)$□□□□l□□□□k□

l□$f(x)$□$g(x)$□□□□□□□□$P(x_1$□$a+lnx_1)$□$Q(x_2$□$\frac{1}{2}x_2^2)$□

□k□□□□□l□□$f(x)$□□□□□□□□k□□□

□$k=\frac{1}{x_1}=x_2=\frac{\frac{1}{2}x_2^2-a-lnx_1}{x_2-x_1}$□

$\therefore x_1=\frac{1}{x_2}$□

$\therefore x_2^2-1=\frac{1}{2}x_2^2-a+lnx_2$□□□□$\frac{1}{2}x_2^2-lnx_2+a-1=0$□

□□□□□□□□x_2□□□□□□

□ $h(x)=\frac{1}{2}x_2^2-lnx_2+a-1(x_2>0)$ □

□ $h(x)$ □□□□

$h'(x)=x_2-\frac{1}{x_2}=\frac{(x_2+1)(x_2-1)}{x_2}$ □

$\therefore h(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore h(x)\geqslant h$ □1□ $=a-\frac{1}{2}$ □

$\therefore h(x)$ □□□□□□□ $h(x)_{min}=h$ □1□ $=a-\frac{1}{2}\leqslant 0$ □

□□ $a\leqslant\frac{1}{2}$ □□□□ a □□□□□□ $(-\infty$ □ $\frac{1}{2}]$ □

17□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=mlnx$ □

□I□□ $m=2\cos k\pi(k\in N)$ □□□□□ $g(x)=x^2-f(x)$ □□□□□

□II□□ $m>0$ □□□□□ $f(x)=mlnx$ □ $h(x)=\frac{x-1}{2x}$ □□□□□□□□□□□□□□ m □□□

□□□□□□□I□□□□□ $g(x)=x^2-f(x)=x^2-2\cos k\pi\cdot lnx$ □ $x\in(0,+\infty)$ □

$g'(x)=2x-\frac{2\cos k\pi}{x}$ □

□ k □□□□□ $\cos k\pi=-1$ □ $g'(x)=2x+\frac{2}{x}>0$ □

$g(x)=x^2-2\cos k\pi\cdot lnx$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ k □□□□□ $\cos k\pi=1$ □ $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ □

□ $x\in(0,1)$ □□ $g'(x)<0$ □□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $g'(x)>0$ □

$\therefore g(x)$ □□□ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□k□□□□□$g(x)$□□□$(0,+\infty)$□□□□□□

□k□□□□□$g(x)$□□□$(0,1)$□□□□□□□$(1,+\infty)$□□□□□□

□Ⅱ□ $f'(x)=\frac{m}{x}$□$h'(x)=\frac{1}{2x^2}$□

□$f(x)$□$h(x)$□□□□□$A(x_1, m\ln x_1)$□$B(x_2$□$\frac{x_2-1}{2x_2})$□

□$f(x)$□□A□□□□□□□□□$y=\frac{m}{x_1}x+m\ln x_1-m$□

$h(x)$□□B□□□□□□□□□$y=\frac{x}{2x_2^2}+\frac{x_2-2}{2x_2}$□

□□□□□□□□□$\begin{cases}\frac{1}{2x_2^2}=\frac{m}{x_1}\\ \frac{x_2-2}{2x_2}=m\ln x_1-m\end{cases}$□

□□□□□□□□□□□□□

□□x_1□□□□□$2m\ln x_2+\frac{1}{x_2}+m\ln 2m-m-\frac{1}{2}=0$□

□$g(x)=2m\ln x+\frac{1}{x}+m\ln 2m-m-\frac{1}{2}$□$g'(x)=\frac{2m}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2mx-1}{x^2}$□

□□$g(x)$□□□$(0,\frac{1}{2m})$□□□□□□□$(\frac{1}{2m}$□$+\infty)$□□□□□□

□□$x\to 0$□□$g(x)\to +\infty$□

$g(x)$□□□□□□□$g(\frac{1}{2m})=0$□□$2m\ln\frac{1}{2m}+2m+m\ln 2m-m-\frac{1}{2}=0$□

□$m\ln 2m-m+\frac{1}{2}=0$□

□$\varphi(m)=m\ln 2m-m+\frac{1}{2}$□$\varphi'(m)=\ln 2m+m\frac{2}{2m}-1=\ln 2m$□

□□ $\varphi(m)$ □□□ $(0,\frac{1}{2})$ □□□□□□□□□ $(\frac{1}{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□□

□ $\varphi(\frac{1}{2})=0$ □ $\therefore m\ln 2m-m+\frac{1}{2}=0$ □□□□□□□ $m=\frac{1}{2}$ □

□ $m=\frac{1}{2}$ □□□□ $f(x)=m\ln x$ □ $h(x)=\frac{x-1}{2x}$ □□□□□□□□□□□□□□

18□□2021•□□□□□□□□□□ $(1,0)$ □□□□□□ $y=x^3$ □ $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ □□□□□□□ a □□□

□□□□□□□□□□□□ $y=x^3$ □□□□□□ $(x_0$ □ $y_0)$ □

□ $\begin{cases} y_0=x_0^3 \\ \frac{y_0}{x_0-1}=3x_0^2 \end{cases}$ □□□□□□□ $k=3x_0^2=0$ □ $k=\frac{27}{4}$ □

□ $k=0$ □□□□□□□□□ $y=0$ □

□ $\begin{cases} y=0 \\ y=ax^2+\frac{15}{4}x-9 \end{cases}$ □

□□ y □□□ $ax^2+\frac{15}{4}x-9=0$ □

□□△ $=0$ □□ $(\frac{15}{4})^2+36a=0$ □

□□□ $a=-\frac{25}{64}$ □

□ $k=\frac{27}{4}$ □□□□□□□ $y=\frac{27}{4}(x-1)$ □

□ $\begin{cases} y=\frac{27}{4}(x-1) \\ y=ax^2+\frac{15}{4}x-9 \end{cases}$ □

□□ y □□ $ax^2-3x-\frac{9}{4}=0$ □

□□△ $=0$ □□ $9+9a=0$ □

□□□ $a=-1$ □

□ $a=-\frac{25}{64}$ □ -1 □

19□□2012•□□□□□□□□ $f(x)=lnx$ □ $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ □□□ $f(x)$ □□□□ x □□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□ $f(x)$ □

$g(x)$ □□□□□

□I□□ a □ b □□□

□II□□ $x>0$ □□□□ $f(x)$ □ $g(x)$ □□□□

□□□□□□ (I) □□□□ $f'(x)=\frac{1}{x}$ □ $g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$ □□2 □□

$\therefore$ □□□□□□ $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ □□5 □□

(II) □ (I) □□ $g(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ □□ $F(x)=f(x)-g(x)=lnx-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ □□

□ $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x})=-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{x})^2\leq 0$ □□8 □□

$\therefore F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□ F □1□ $=0$ □□9 □□

$\therefore$ □ $x\in(0,1)$ □□ $F(x)>0$ □□ $f(x)>g(x)$ □

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $F(x)<0$ □□ $f(x)<g(x)$ □

□ $x=1$ □□ $F(x)=0$ □□ $f(x)=g(x)$ □□12 □□

20□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=ax^2$ □ $g(x)=lnx$ □

□I□□ $a=1$ □□□ $f(x)-g(x)$ □□□□□

□II□□□□ $y=f(x)$ □ $y=g(x)$ □□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□I□□ $a=1$ □□□ $F(x)=f(x)-g(x)=x^2-lnx$ □

$F(x)=2x-\frac{1}{x}(x>0)F(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$ □

□ $F(x)=0$ □ $x>0$ □□ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ □ $F_{min}=F(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}ln2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln2$ □

□II□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□ $f(x)>g(x)$ □□□□ $y=f(x)$ □ $y=g(x)$ □□□□□□□

□ $ax^2>lnx$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $a>\frac{lnx}{x^2}$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $h(x)=\frac{lnx}{x^2}$ □ $h'(x)=\frac{1-2lnx}{x^3}$ □□ $h'(x)=\frac{1-2lnx}{x^3}=0$ □ $x=\sqrt{e}$ □

□ $h_{max}=h(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$ □□□□ $a>\frac{1}{2e}$ □

□□□□□□□□□□□□□□□□□ $\begin{cases} ax_0^2=lnx_0 \\ 2ax_0=\frac{1}{x_0} \end{cases}$ □□□ $x_0=\sqrt{e}$ □ $a=\frac{1}{2e}$ □

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $a>\frac{1}{2e}$ □

□ a □□□□□□ $(\frac{1}{2e}$□$+\infty)$ □

21□□2015•□□□□□□□□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(1-a)x^2-4ax+a$ □□□ a □□□

□1□□ $a=2$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□$[0$□$3]$□□□□□□3□□□□ a □□□□□□

□3□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□ $y=\frac{1}{x}-(a+1)^2$ □□□□□□□□□□□

□□□□□□□1□□ $a=2$□□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+2$ □

$f'(x)=x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$□□ $f'(x)<0$□□□ $x\in(-2,4)$□

□□ $a=2$□□□□ $f(x)$ □□□□□□□$(-2,4)$□…□3 □□

□2□ $f'(x)=x^2+2(1-a)x-4a=(x+2)(x-2a)$□

i□□ $a\leqslant 0$□□ $f'(x)\geqslant 0$□□□$[0$□$3]$□□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□ $f(x)_{max}=f$□3□$=18-20a=3$□ $\therefore a=\frac{3}{4}$□□□ $a\leqslant 0$□□□□□□…□4 □□

ii□□ $a>0$□□ $f'(x)=x^2+2(1-a)x-4a=(x+2)(x-2a)$□

□□ $f(x)$ □□□$[0$□$3]$□□□□□□3□□□ $f(0)=a\leqslant 3$□

□$2a\geqslant 3$□□ $a\geqslant\frac{3}{2}$□□ $f'(x)\leqslant 0$□□□$[0$□$3]$□□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□ $f(x)_{max}=f(0)=3$□□ $a=3\geqslant\frac{3}{2}$□□ $a=3$□□□□□…□6 □□

□$0<2a<3$□□ $0<a<\frac{3}{2}$□□ $f'(x)\leqslant 0$□□□$[0$□$3]$□□□□$[0$□$2a]$□

□□□ $f(x)$ □□□$[0$□$2a]$□□□□□□□□□$[2a$□$3]$□□□□□

□□ $f(x)_{max}=max\{f(0)$□ f□3□$\}$□□□□ $f(0)=a<3$□

□□□ f□3□$=3$□□□ $a=\frac{3}{4}<\frac{3}{2}$□□ $a=\frac{3}{4}$□□□□□

□□□□□ a □□□□□□$\{3$□$\frac{3}{4}\}$□…□8 □□

□3□□ $g(x)=\frac{1}{x}-(a+1)^2$ □□□□□ $[x_0,\frac{1}{x_0}-(a+1)^2]$ □□ $g'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ □

□□□□□□ $y-\frac{1}{x_0}+(a+1)^2=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$ □

□□□ $y=-\frac{1}{x_0^2}+\frac{2}{x_0}-(a+1)^2$ □

$f'(x)=x^2+2(1-a)x-4a$ □□□□□□□□□□□ $y=f'(x)$ □□□□□□

□ $x^2+2(1-a)x-4a=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}-(a+1)^2$ □

□□□□ $x^2+(\frac{1}{x_0^2}+2-2a)x-\frac{2}{x_0}+(a-1)^2=0$ □

□ $\triangle=(\frac{1}{x^2}+2-2a)^2-4[-\frac{2}{x_0}+(a-1)^2]=\frac{1}{x_0^4}+\frac{4(1-a)}{x_0^2}+\frac{8}{x_0}=0$ □

□□□ $8x_0^3+4(1-a)x_0^2+1=0(x_0\neq 0)$ □

□□□□□□□□□□□□□□□□□ $y=f'(x)$ □□□□□□ $y=\frac{1}{x}-(a+1)^2$ □□□□□□□□□□ ··· □10□□

□ $h(x)=8x^3+4(1-a)x^2+1$ □□ $h'(x)=24x^2+8(1-a)x=8x(3x+1-a)$ □

□ $h'(x)=0$ □□□ $x=0$ □ $x=\frac{a-1}{3}$ □

i□□ $\frac{a-1}{3}<0$ □□ $a<1$ □□ $h'(x)<0$ □□□□ $(\frac{a-1}{3},0)$ □□□□□□

x	$(-\infty,\frac{a-1}{3})$	$\frac{a-1}{3}$	$(\frac{a-1}{3}$□$0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↑	□□□	↓	□□□	↑

□□□□□ $x=$□□ $f(x)$ □□□□□□

□□□ $h(0)=1>0$ □□□□□ $8x_0^3+4(1-a)x_0^2+1=0$ □ $(x_0\neq 0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ … □12 □□

ii □□ $\frac{a-1}{3}=0$ □□ $a=1$ □□ $h'(x)\geq 0$ □□□□□ $h(x)$ □ R □□□□□□

□□□ $h(0)=1>0$ □□□□□ $8x_0^3+4(1-a)x_0^2+1=0(x_0\neq 0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ … □13 □□

iii □□ $\frac{a-1}{3}>0$ □□ $a>1$ □□ $h'(x)<0$ □□□□ $(0,\frac{a-1}{3})$ □□□□□□

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{a-1}{3})$	$\frac{a-1}{3}$	$(\frac{a-1}{3}$ □ $+\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↑	□□□	↓	□□□	↑

□□□□□ $x=0$ □□ $h(x)$ □□□□□□□ $x=\frac{a-1}{3}$ □□ $h(x)$ □□□□□□

□□ $h(0)=1>0$ □ $h(\frac{a-1}{3})=\frac{8}{27}(a-1)^3-\frac{4}{9}(a-1)^3+1=-\frac{4}{27}(a-1)^3+1$ □

□ $h(\frac{a-1}{3})=-\frac{4}{27}(a-1)^3+1>0$ □□ $1<a<\frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}$ □□

□□ $8x_0^3+4(1-a)x_0^2+1=0$ □ $(x_0\neq 0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□ $h(\frac{a-1}{3})=-\frac{4}{27}(a-1)^3+1=0$ □□ $a=\frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}$ □□

□□ $8x_0^3+4(1-a)x_0^2+1=0$ □ $(x_0\neq 0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□ $h(\frac{a-1}{3})=-\frac{4}{27}(a-1)^3+1<0$ □□ $a>\frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}$ □□

□□ $8x_0^3+4(1-a)x_0^2+1=0(x_0\neq 0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□ $a<\frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}$ □□□□□□□□□□□□ $a=\frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}$ □□□□□□□□□□□

□$a > \frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}$□□□□□□□□□□□□… □16□□

22□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a, x<0\\ lnx, x>0\end{cases}$ □□a□□□□□$A(x_1$□$f(x_1))$□$B(x_2$□$f(x_2))$□□□□□□□□□□□□□

$x_1 < x_2$□

□I□□$x<0$□□□□□□$g(x)=f(x)$□$f(e^x)$□□□□□

□II□□□□$f(x)$□□□□□A□B□□□□□□□□□a□□□□□□

□□□□□□□I□□$x<0$□□$f(x)=x^2+2x+a$□

□ $e^x>0$□$\therefore f(e^x)=x$□

$\therefore g(x)=f(x)$□$f(e^x)=x^3+2x^2+ax$□

$\therefore g'(x)=3x^2+4x+a=3(x+\frac{2}{3})^2+a-\frac{4}{3}$□

①$a\geqslant\frac{4}{3}$□□$g'(x)\geqslant 0$□□□$g(x)$□$(-\infty,0)$□□□□□□

②$a<\frac{4}{3}$□□$g'(x)=0$□□$x_1=\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}$□$x_2=\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}$□

$0<a<\frac{4}{3}$□□$x_2<0$□$g(x)$□$(-\infty,\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3})$□□□□□□□$(\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}$□$\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3})$□□□□□□□□

$(\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}$□$0)$□□□□□□

③$a\leqslant 0$□□$x_2\geqslant 0$□□□□□$g(x)$□$(-\infty,\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3})$□□□□□□□$(\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}$□$0)$□□□□□□

(Ⅱ) 当 $x_1 < x_2 < 0$，或 $0 < x_1 < x_2$ 时，$f'(x_1) \neq f'(x_2)$，故 $x_1 < 0 < x_2$，

当 $x_1 < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-(x_1^2+2x_1+a)=(2x_1+2)(x-x_1)$；

当 $x_2 > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的切线方程为 $y-lnx_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$；

两直线重合的充要条件是 $\frac{1}{x_2}=2x_1+2$ 且 $lnx_2-1=-x_1^2+a$，

由①及 $x_1<0<x_2$ 得 $0<\frac{1}{x_2}<2$，由①②得 $a=lnx_2+(\frac{1}{2x_2}-1)^2-1=-ln\frac{1}{x_2}+\frac{1}{4}(\frac{1}{x_2}-2)^2-1$，

令 $t=\frac{1}{x_2}$，则 $0<t<2$，且 $a=\frac{1}{4}t^2-t-lnt$，设 $h(t)=\frac{1}{4}t^2-t-lnt$，$(0<t<2)$

则 $h'(t)=\frac{1}{2}t-1-\frac{1}{t}=\frac{(t-1)^2-3}{2t}<0$，$\therefore h(t)$ 在 $(0,2)$ 为减函数，

则 $h(t)>h(2)=-ln2-1$，$\therefore a>-ln2-1$，

$\therefore$ 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A，B 处的切线重合，a 的取值范围 $(-ln2-1,+\infty)$．

23．(2021•天津) 已知函数 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，其中 $a>1$．

(Ⅰ) 求函数 $h(x)=f(x)-xlna$ 的单调区间；

(Ⅱ) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行，证明：$x_1+g(x_2)=-\frac{2lnlna}{lna}$；

(Ⅲ) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线．

【解答】(Ⅰ) 解：由已知，$h(x)=a^x-xlna$，有 $h'(x)=a^xlna-lna$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$．

由 $a>1$，可知当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↓	□□□	↑

$\therefore$□□ $h(x)$ □□□□□□ $(-\infty,0)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □

□Ⅱ□□□□ $f'(x)=a^x\ln a$ □□□□ $y=f(x)$ □□ $(x_1$ □ $f(x_1))$ □□□□□□□ $a^{x_1}\ln a$ □

□ $g(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$ □□□□ $y=g(x)$ □□ $(x_2$ □ $g(x_2))$ □□□□□□□ $\dfrac{1}{x_2\ln a}$ □

$\because$ □□□□□□□□□ $a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}$ □□ $x_2a^{x_1}(\ln a)^2=1$ □

□□□□ a □□□□□□□ $\log_a x_2+x_1+2\log_a\ln a=0$ □

$\therefore x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$ □

□Ⅲ□□□□□ $y=f(x)$ □□ (x_1,a^{x_1}) □□□ $l_1: y-a^{x_1}=a^{x_1}\ln a(x-x_1)$ □

□□ $y=g(x)$ □□ $(x_2$ □ $\log_a x_2)$ □□□ $l_2: y-\log_a x_2=\dfrac{1}{x_2\ln a}(x-x_2)$ □

□□□□ $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□□ l □□ l □□□ $y=f(x)$ □□□□□□□ $y=g(x)$ □□□□

□□□□ $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□ $x_1\in(-\infty,+\infty)$ □ $x_2\in(0,+\infty)$ □□ l_1 □ l_2 □□□

□□□□□ $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□

$$\begin{cases} a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a} & ① \\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a} & ② \end{cases}$$

□①□ $x_2=\dfrac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$ □□□②□□

$$a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$$ □③

□□□□□□□□ $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□ x_1 □□□③□□□□□□

□□□ $u(x)=a^x - xa^x\ln a + x + \frac{1}{\ln a} + \frac{2\ln\ln a}{\ln a}$ □□□□□□ $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□ $y=u(x)$ □□□□□

$u'(x)=1-(\ln a)^2 xa^x$ □□□ $x\in(-\infty,0)$ □□ $u'(x)>0$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□ $u'(x)$ □□□□□

□ $u'(0)=1>0$ □ $u'(\frac{1}{(\ln a)^2})=1-a^{\frac{1}{(\ln a)^2}}<0$ □

□□□□□□ x_0 □□ $x_0>0$ □□□ $u'(x_0)=0$ □□ $1-(\ln a)^2 x_0 a^{x_0}=0$ □

□□□□□ $u(x)$ □ $(-\infty,x_0)$ □□□□□□□ $(x_0$ □ $+\infty)$ □□□□□□

$u(x)$ □ $x=x_0$ □□□□□□ $u(x_0)$ □

□ $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ □□ $\ln\ln a \geq -1$ □

$\therefore u(x_0)=a^{x_0}-x_0a^{x_0}\ln a+x_0+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=\frac{1}{x_0(\ln a)^2}+x_0+\frac{2\ln\ln a}{\ln a} \geq \frac{2+2\ln\ln a}{\ln a} \geq 0$ □

□□□□□□□□ t □□□ $u(t)<0$ □

□□I□□□ $a^x \geq 1+x\ln a$ □□ $x>\frac{1}{\ln a}$ □□□

$u(x) \leq (1+x\ln a)(1-x\ln a)+x+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=-(\ln a)^2x^2+x+1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}$ □

$\therefore$ □□□□ t □□□ $u(t)<0$ □

□□□□ $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□ $x_1\in(-\infty,+\infty)$ □□□ $u(x_1)=0$ □

$\therefore$ □ $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ □□□□□□ l □□ l □□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□ $y=g(x)$ □□□□